

SCHEDA 3: LOGOI SPERMATIKOI.

1. Una sequenza costruita col binomio *hemiolios*.

Il binomio *hemiolios* ($1 + 1/2$) era usato dai Pitagorici per mimare ricorsivamente l'“ineffabile”, cioè i valori irrazionali. A tale scopo, essi costruivano sequenze di questo tipo:

$$1; 1 + \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{(2 + \frac{1}{2})}; 1 + \frac{1}{[2 + \frac{1}{(2 + \frac{1}{2})}]}; \dots$$

Continuando nel procedimento riusciamo ad ottenere una frazione a/b , tale che a^2/b^2 differisce da 2, meno di qualsiasi grandezza che le si voglia attribuire. E questo è ciò che intendiamo quando diciamo che 2^* (o $\sqrt{2}$) è il valore-limite verso cui converge la sequenza in questione.

Provando ora a ricondurre a valori frazionari (ovvero a *logoi* semplici) la sequenza sopra accennata, avremo:

$$1 = \mathbf{1/1};$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \mathbf{3/2};$$

$$1 + \frac{1}{(2 + \frac{1}{2})} = 1 + \frac{1}{(4/2 + \frac{1}{2})} = 1 + \frac{1}{(5/2)} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = \mathbf{7/5};$$

$$1 + \frac{1}{[2 + \frac{1}{(2 + \frac{1}{2})}]} = 1 + \frac{1}{[2 + \frac{1}{(4/2 + \frac{1}{2})}]} = 1 + \frac{1}{[2 + \frac{1}{(5/2)}]} = 1 + \frac{1}{(2 + \frac{2}{5})} = 1 + \frac{1}{(10/5 + \frac{2}{5})} = 1 + \frac{1}{(12/5)} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{12}{12} + \frac{5}{12} = \mathbf{17/12};$$

e così via.

2. La sequenza delle “diagonali effabili”.

2.1. Un primo modo di esprimere la sequenza.

Tale sequenza è fondata su un *logos spermatikós* che si può ricostruire come segue: ogni valore della sequenza viene espresso come rapporto razionale tra un numeratore (detto “numero diagonale” = d) e un denominatore (detto “numero lato” = l). Posto convenzionalmente il primo valore della sequenza come $\frac{d_1}{l_1} = \mathbf{1}$, un generico valore

$$\frac{d_l}{l_l} = 1$$

successivo sarà costruibile così: $\frac{d_n}{l_n} = \frac{2l_{n-1} + d_{n-1}}{l_n}$.

$$l_n = l_{n-1} + d_{n-1}$$

Ora, un tale algoritmo – che tiene in relazione i valori “diagonali” e “lati” secondo una certa ragione generatrice – risulta produttore di una duplice sequenza convergente di valori razionali, alternativamente minori e maggiori del comune luogo di convergenza, che è 2^* . Vediamo come.

$$\underline{d_1 = 1};$$

$$l_1 = 1$$

$$\underline{d_2 = (2 \cdot 1) + 1 = 3};$$

$$l_2 = 1 + 1 = 2$$

$$\underline{d_3 = (2 \cdot 2) + 3 = 7};$$

$$l_3 = 2 + 3 = 5$$

$$\underline{d_4 = (2 \cdot 5) + 7 = 17};$$

$$l_4 = 5 + 7 = 12$$

$$\underline{d_5 = (12 \cdot 2) + 17 = 41};$$

$$l_5 = 12 + 17 = 29$$

$$\underline{d_6 = (2 \cdot 29) + 41 = 99};$$

$$l_6 = 29 + 41 = 70$$

$$\underline{d_7 = (2 \cdot 70) + 99 = 239};$$

$$l_7 = 70 + 99 = 169$$

$$\underline{d_8 = (2 \cdot 169) + 239 = 577};$$

$$l_8 = 169 + 239 = 408$$

e così via.

Raccogliendo i primi risultati, abbiamo la sequenza:

1/1; 3/2; 7/5; 17/12; 41/29; 99/70; 239/169; 577/408...

che, a ben vedere, andrebbe disposta secondo il modello di un tiro a forcella, in cui i primi due colpi sono gli estremi di un successivo approssimarsi duplice e convergente verso quei puntini che indicano il valore sempre perseguito e mai raggiunto:

1/1; 7/5; 41/29... ...99/70; 17/12; 3/2.

I valori ricavati da questo algoritmo sono alternativamente minori e maggiori del valore che perseguono (come in un tiro a forcella che va aggiustandosi, ma che non raggiunge mai il bersaglio). Si tratta di valori tutti quanti razionali, espressi da frazioni di numeri interi (perfettamente uguali a quelli ottenuti con il metodo dello sviluppo del binomio emiolio).

2.2. Un secondo modo di esprimere la sequenza.

La sequenza delle diagonali effabili si può anche esprimere come segue:

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} \text{ et } \Delta^*_{n-1}$$

dove Δ_{n-1} è la diade finita $\{d_{n-1}, l_{n-1}\}$,

mentre Δ^*_{n-1} è la diade finita $\{d^*_{n-1}, l^*_{n-1}\}$,

dove $d^*_{n-1} = 2 l_{n-1}$

e $l^*_{n-1} = d_{n-1}$.

Ora, la proprietà fondamentale della diade Δ_n è che la differenza tra $(d_n)^2$ e $2(l_n)^2$ è sempre uguale alla monade; cioè: $(d_n)^2 - 2(l_n)^2 = \pm 1$.

Prendiamo $d_1/l_1 = 1/1$, e otteniamo che: $1^2 - 2(1)^2 = -1$;

prendiamo $d_2/l_2 = 3/2$, e otteniamo che: $3^2 - 2(2)^2 = 9 - 8 = +1$;

prendiamo $d_3/l_3 = 7/5$, e otteniamo che: $7^2 - 2(5)^2 = 49 - 50 = -1$;

e così via; comunque ottenendo $-/+ 1$.

Torniamo sulla formula $\Delta_n = \Delta_{n-1} \text{ et } \Delta^*_{n-1}$, per comprenderla meglio. E applichamola dunque a un caso specifico:

$$\Delta_3 = d_2/l_2 \text{ et } d^*2/l^*2 = 3/2 \text{ et } (2 \cdot 2)/3 = (3 + 4)/(2 + 3) = 7/5.$$

Come si vede, *et* indica la somma (partita) dei numeratori coi numeratori e dei denominatori coi denominatori.