

SCHEDA 7: PLATONE E I NUMERI REALI.

1. Dedekind¹ riconosce che la retta (e, in generale, il “continuo”) è un buon modello per schematizzare i numeri reali (= naturali + razionali + irrazionali). Si consideri la fig. 1, dove l’asse delle ascisse rappresenta la serie dei numeri². Qui trovano posto anche valori di tipo non razionale. Lo si capisce costruendo un quadrato unitario due lati del quale giacciono, rispettivamente, sull’asse delle ascisse e su quello delle ordinate: ora, se il lato = 1 costituisce un referente per il numero 1, la proiezione della diagonale sul medesimo asse, con la “sezione” (*Schnitt*) cui dà luogo, rappresenta un referente per il valore $\sqrt{2}$, non coincidente né con 1 né con 1,5: valore, quest’ultimo, facilmente ricavabile in relazione al segmento che corrisponde a 1.

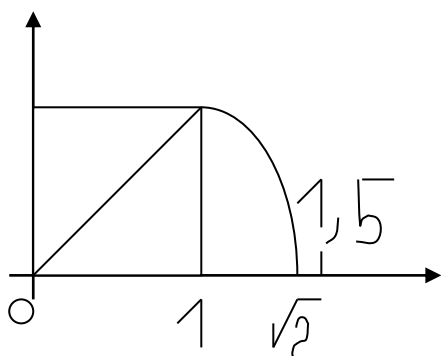


fig. 1

Quanto ai numeri razionali, Dedekind riconosce ad essi tre proprietà fondamentali:

- (1) “Ordinamento” (cioè, transitività nell’ordine della grandezza), per cui, se $a > b$, e $b > c$, allora $a > c$.
- (2) “Densità”, per cui, se $a \neq b$, allora esistono infiniti numeri razionali compresi tra a e b .
- (3) “Sezione”, per cui, se a è un numero razionale dato, tutti i razionali si ripartiscono in due classi (A1 e A2), contenenti ognuna infiniti elementi tali che, nella prima stanno tutti i numeri minori di a , e nella seconda tutti i numeri maggiori di a (mentre a , da parte sua, può stare *aut* nella prima *aut* nella seconda).

Ora, se si fissa un segmento che faccia da unità di misura – come abbiamo fatto nella fig. 1 -, si può associare ad ogni numero razionale un punto su una retta: un punto realizzante i tre caratteri di cui sopra. Se non che, la corrispondenza non è biunivoca, in quanto esistono sulla retta infiniti punti ai quali non corrisponde alcun numero razionale. Se dunque si vuole un sistema numerico che mantenga «la qualità di essere completo, senza lacune, ossia continuo», come è la retta, occorre riconoscere nuovi numeri, perché i razionali non bastano a “colmare” la retta stessa.

¹ Cfr. R. Dedekind, *Stätigkeit und irrationale Zahlen*.

² Prendiamo, rielaborandola, la figura 1 dal libro di P. Zellini, *Breve storia dell’infinito*, Adelphi, Milano 1989³, p. 63.

2. Una concezione di numero sufficientemente generica, cioè tale da colmare il continuo, pare a Dedekind la seguente: ogni numero “reale” è (o corrisponde a) una “sezione” che divide in due la retta dei numeri. In particolare, ogni “sezione” deve essere tale da dividere il campo (o la retta) dei numeri reali in due parti – A_1 e A_2 -, in modo che (1) ogni numero reale appartenga all’una o all’altra parte; (2) ogni numero appartenente alla A_1 sia minore di ogni numero appartenente alla A_2 .

Ora, è impossibile che si realizzi insieme che *et* la A_1 possieda un massimo *et* la A_2 possieda un minimo; infatti, in quel caso, si potrebbe sempre trovare un medio tra i due. Ad esempio, se il massimo della A_1 fosse 4, e il minimo della A_2 fosse 5, si potrebbe trovare il medio aritmetico tra i due, cioè $(4 + 5)/2 = 4,5$. Si veda, al riguardo, la fig. 2:

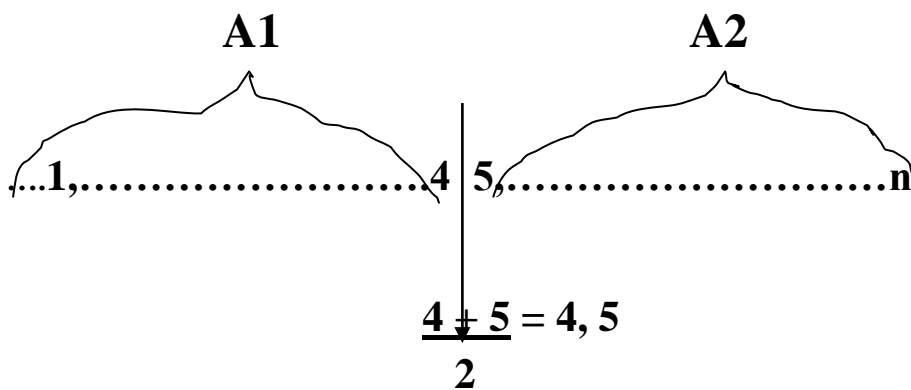


fig. 2

Dunque, restano possibili – perché si dia una effettiva “sezione” – due soli casi:

- (1) il primo è quello che *aut* la A_1 possieda un massimo, *aut* la A_2 possieda un minimo;
- (2) il secondo è che *nec* la A_1 possieda un massimo, *nec* la A_2 possieda un minimo.

Ora, quando si verifica il caso (1), l’elemento che stabilisce la sezione tra i due campi – cioè l’elemento di separazione – è un numero razionale; invece, nel caso (2) si dice che i due campi definiscono un numero “irrazionale”, che viene assunto come elemento di separazione tra essi. Un numero “reale” – che potrebbe dunque anche rivelarsi irrazionale – si scrive genericamente così: $\alpha(A_1, A_2)$.

È sufficientemente chiara, a questo punto, una certa corrispondenza (quasi un isomorfismo) tra il “continuo” (aristotelico) e la sequenza dei numeri reali. In entrambe le sequenze, infatti, le componenti non sono date attualmente; e, quando vengono individuate, non risultano tra loro “contigue”, bensì “continue”. In che senso? Nel senso che tra A_1 e A_2 non c’è separazione; ovvero, il punto/numero che le separa, è comune ad entrambe: così A_1 non è autonomo da A_2 . Problematico è poi il caso in cui la “sezione” sia irrazionale: in quel caso, infatti, il valore numerico non corrisponde tanto ad un punto, quanto ad una banda di oscillazione: il numero irrazionale è infatti il limite di un processo di avvicinamento incessante tra A_1 e A_2 .