MASSIMILIANO BERTI

Matematica e contemplazione

«Un grande poeta è meno inventore che scopritore».
J.L. Borges[1].

L'individuare possibili relazioni tra *matematica* e *contemplazione* e riconoscere quanto l'esperienza lavorativa di un matematico abbia da condividere con la contemplazione è un compito alquanto sfidante e difficile. Per quanto s'intravvedano legami, il definirli si rivela un compito sfuggente. È sicuramente comune al lavoro di ricerca l'esperienza, solitamente in seguito a molto lavoro preparatorio, un'ordinata educazione e molte prove e fallimenti, di avere 'luci improvvise', 'vedere' nuovi panorami, 'intuire' nuove relazioni, 'capire' in modo più evidente alcuni risultati. Questa esperienza, tanto universale e trasversale a diverse epoche e culture umane, mi pare ben espressa dalle considerazioni che Platone in età oramai avanzata comunicava così:

> In effetti, la conoscenza di tali verità non è affatto comunicabile come le altre conoscenze, ma, dopo molte discussioni fatte su questi temi, e dopo una comunanza di vita, improvvisamente, come luce che si accende dallo scoccare di una scintilla, essa nasce dall'anima e da sé stessa si alimenta[2].

Queste celebri parole, che lessi la prima volta da adolescente, mi sono sempre state di guida (senza entrare nel dibattito circa le 'dottrine nascoste' di Platone) in un'appassionata vita di ricerca, sperimentando più volte come, da una frequente e familiare conversazione con qualche 'oggetto' (matematico, fisico, filosofico) e dall'intima convivenza con esso, in condivisione con amici e colleghi, sorga, poi, improvvisamente una luce, una scintilla, che pare venire da 'fuori di noi'. Platone farà dire a

---

[1] J.L. Borges, *La ricerca di Averroè*, in Id., *L'Aleph* (1949), trad. it. di F. Tentori Montalto, Milano, Adelphi, 1998, p. 81.

[2] Platone, *Lettera VII*, 341 c-d, trad. it. di R. Radice, in Id., *Tutti gli scritti*, a cura di G. Reale, Milano, Rusconi, 1991, p. 1820.

Socrate che «i beni più grandi ci provengono mediante una mania che ci viene data per concessione divina»[3].

Mi pare di questo tipo l'illuminazione matematico-concettuale descritta da Kant con queste parole (senza entrare adesso nel dibattito circa il carattere *a-priori* della conoscenza matematica):

Il primo che dimostrò il triangolo isoscele (si chiamasse Talete o come si voglia) fu colpito da una gran luce: perché comprese ch'egli non doveva seguire a passo a passo ciò che vedeva nella figura, né attaccarsi al semplice concetto di questa figura, quasi per impararne le proprietà[4].

In queste pagine proverò a tratteggiare, senza pretese di completezza, alcuni aspetti dell'esperienza vitale della scoperta in matematica e fisica, il suo carattere sapienziale, e come possa essere vista in via propedeutica ad altre forme di contemplazione. Un potente movente della grande avventura scientifica mi pare sia la tensione verso la ricerca di senso dell'esistenza. Rivolgerò l'attenzione soprattutto alla matematica e fisica degli ultimi secoli, in cui hanno avuto uno sviluppo spettacolare. Nell'ultima parte parlerò dei teoremi di incompletezza di Gödel e Turing che meritano di essere conosciuti per riflettere più propriamente sulla natura della matematica.

1. *La scoperta in matematica e fisica*

La sensazione dell'ignoto e del mistero che ci circonda è sicuramente alla base della ricerca scientifica di tutti i tempi. Aristotele affermò che «gli uomini hanno cominciato a filosofare [...] a causa della meraviglia»[5].

Nelle prossime pagine parlerò spesso assieme di matematica e fisica, essendo profondamente convinto che 'il gran libro della natura è scritto in caratteri matematici'. Tra le innumerevoli esperienze di contemplazione spontanea riporto questa citazione attribuita al fisico Enrico Fermi:

Una sera [...] ruppe il silenzio, ma non l'incanto, la voce grave di un grosso contadino, rozzo in apparenza, che stando disteso sul prato con gli occhi volti alle stelle, esclamò, quasi obbedendo a una ispirazione profonda: «Com'è bello! E pure c'è chi dice che Dio non esiste». [...] Un eccelso profeta ebreo senten-

---

[3] Id., *Fedro*, 244 a, trad. it. di G. Reale, in *ibidem*, p. 553.

[4] I. Kant, *Critica della ragion pura*, prefazione alla II edizione, 1787, B XI-XII e B XIII-XIV, trad. it. di G. Gentile - G. Lombardo-Radice, I, Roma-Bari, Laterza, 1989, pp. 17-18.

[5] Aristotele, *Metafisica*, 982b, trad. it. di G. Reale, II, Milano, Vita e Pensiero, 1993, p. 11.

ziò, or sono tremil'anni: «I cieli narrano la gloria di Dio». Uno dei più celebri filosofi dei tempi moderni scrisse: «Due cose mi riempiono il cuore di ammirazione e di reverenza: il cielo stellato sul capo e la legge morale nel cuore». Quel contadino umbro non sapeva nemmeno leggere. Ma c'era nell'animo suo, custoditovi da una vita onesta e laboriosa, un breve angolo in cui scendeva la luce di Dio, con una potenza non troppo inferiore a quella dei profeti e forse superiore a quella dei filosofi[6].

Nella fisica e nella matematica lo stupore è esperienza comune. Nuove idee, concetti e scoperte emergono spesso via connessioni inattese! Come non stupirsi che un'equazione scritta da Einstein nel 1915 per princìpi filosofici di equivalenza, ed elaborata grazie al calcolo assoluto sviluppato dal matematico Ricci Curbastro – ossia l'equazione della relatività generale –, abbia prodotto delle soluzioni singolari, che inizialmente sembravano un difetto matematico da eliminare e che poi invece hanno dato origine alla teoria dei buchi neri, attestata da avvincenti verifiche sperimentali sempre più stringenti, fino alle loro recentissime fotografie? O come non meravigliarsi che tali equazioni prevedano soluzioni ondose per la propagazione del campo gravitazionale, con effetti che sono stati osservati solo di recente, più di un secolo dopo, mediante lo sviluppo di raffinatissimi strumenti tecnologici quali Virgo-Ligo? O come non rimanere sbalorditi che l'equazione di Dirac, scritta nel 1928 per avere un'equazione compatibile con la relatività ristretta di Einstein e che preveda solo effetti 'locali' della natura, fornisca delle 'strane' soluzioni con energia negativa, che hanno dato inizio alla scoperta dell'anti-materia? Dirac, com'è noto, interpretò la strana soluzione della sua equazione avente energia negativa come una particella uguale all'elettrone, ma di carica opposta, realmente esistente, che fu poco dopo sperimentalmente osservata in una camera a bolle!

Il fisico teorico Abdus Salam, nel discorso tenuto alla cerimonia di conferimento del premio Nobel, disse:

The creation of Physics is the shared heritage of all mankind. […] In the Holy Book of Islam, Allah says: «Thou seest not, in the creation of the All-merciful any imperfection, Return thy gaze, seest thou any fissure. Then Return thy gaze, again and again. Thy gaze, Comes back to thee dazzled, aweary». This in effect is the faith of all physicists; the deeper we seek, the more is our wonder excited, the more is the dazzlement for our gaze[7].

Il legame strettissimo tra l'ordine matematico e il mondo fisico non ha mai cessato di affascinare intere generazioni di scienziati. Il premio

[6] Da una testimonianza attribuita a E. Fermi da M. Micheli.

[7] A. Salam, dal discorso alla cerimonia di conferimento del premio Nobel 1979.

Nobel E. Wigner nel suo famoso articolo *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*[8], usa, nel descrivere con numerosi esempi tale corrispondenza tra matematica e natura, la parola «miracolo» ben tredici volte! Non vi è alcuna necessità per tali correlazioni… È veramente sorprendente che le strutture algebriche dei campi numerici – naturali, razionali, reali e immaginari – emergano nella descrizione e previsione del mondo fisico, per esempio in meccanica quantistica. Mentre numeri interi e geometria euclidea partono da un legame ancora immediato col mondo circostante, nulla nell'esperienza quotidiana suggerisce, per esempio, l'introduzione di 'radici quadrate di numeri negativi': i numeri complessi. Storicamente essi furono introdotti da Cardano, nel Medioevo, come espedienti per fornire la soluzione esplicita di un'equazione cubica. Invece, poi tali 'oggetti' rivelano avere importantissime ripercussioni nel mondo fisico.

Considerazioni simili sono, a mio avviso, una porta aperta verso la contemplazione. Perché l'universo è ordinato in modo razionale e intelligibile? Perché è cosi e non diversamente? Perché la scienza funziona? Anche Schrödinger[9] trovava miracoloso che, nonostante l'enorme complessità del mondo, sia possibile rilevare e scoprire certe regolarità negli eventi, una qualche legge di natura. Non è ovvio per nulla che esistano leggi di natura e tantomeno che l'uomo possa scoprirle.

Ed è invece proprio questa solida fiducia-fede che sostiene l'impresa scientifica della ricerca. Penso che la scienza moderna sia nata in Occidente grazie alla certezza, sviluppata dalla filosofia della conoscenza medievale, radicata nella tradizione giudaico-cristiana, circa la possibilità propria dell'intelletto umano di astrarre dal mondo sensibile concetti universali[10].

Su questa lunghezza d'onda così Benedetto XVI rispose a un liceale di Roma:

> Mi sembra una cosa quasi incredibile che una invenzione dell'intelletto umano [la matematica] e la struttura dell'universo coincidano: la matematica inventata da noi ci dà realmente accesso alla natura dell'universo e lo rende utilizzabile per noi. Quindi la struttura intellettuale del soggetto umano e la struttura oggettiva della realtà coincidono […]. Penso che questa coincidenza tra quanto noi abbiamo pensato e il come si realizza e si comporta la natura, siano un enigma e una sfida grandi[11].

---

[8] In «Comm. Pure Applied Math.», vol. 13 (1960).

[9] E. Schrödinger, *What is Life?*, Cambridge, Cambridge University Press, 1945.

[10] Cfr. É. Gilson, *Lo spirito della filosofia medievale*, Brescia, Morcelliana, 1983, cap. 2, parte II.

[11] Dal discorso ai giovani della diocesi di Roma, 6 aprile 2006.

Qui si dischiude un classico dibattito: la matematica è invenzione o scoperta? Quando un matematico ottiene i suoi risultati sta solo producendo complesse costruzioni mentali oppure scopre verità la cui esistenza è indipendente dalla sua attività? In certi casi, gli oggetti del mondo matematico sembrano idealizzazioni mentali. In altri, molti matematici hanno la convinzione, maturata dopo 'frequente e familiare conversazione con tali oggetti', che essi abbiano una realtà propria e che la matematica sia più scoperta che invenzione. H. Poincaré sintetizzò la sua fecondissima esperienza di ricerca dicendo «ci sono problemi che ci si pone e problemi che si pongono da sé». Poincaré ha anche parlato del ruolo decisivo che un lungo lavoro inconscio gioca nella comparsa di illuminazioni matematiche. Sarebbe di grande interesse psicologico indagare i processi cognitivi operanti durante le fasi di una scoperta[12].

Molto probabilmente, la convinzione, anche implicita, che la matematica abbia una sua verità oggettiva è una forte motivazione a un duro lavoro di ricerca, talvolta ossessivo. In questo àmbito non si può non pensare a Kurt Gödel. In una lettera a G. Günther nel 1954 scrisse:

When I say that one can develop a theory of classes as objectively existing entities, I do indeed mean by that existence in the sense of ontological metaphysics, by which, however, I do not want to say that abstract entities are present in nature. They seem rather to form a second plane of reality, which confronts us just as objectively and independently of our thinking as nature[13].

Nella sua *Gibbs Lecture* Gödel suggerisce un'altra possibilità:

If mathematics describes an objective world just like physics, there is no reason why inductive methods should not be applied in mathematics just the same as in physics. The fact is that in mathematics we still have the same attitude today that in former times one had toward all science, namely we try to derive everything by cogent proofs from the definitions (that is, in ontological terminology, from the essences of things). Perhaps this method, if it claims monopoly, is as wrong in mathematics as it was in physics[14].

Gödel attributiva al suo platonismo la guida che lo aveva portato alla scoperta – non invenzione (!) – dei suoi formidabili teoremi. Di questi risul-

---

[12] A questo tema ha dedicato molta attenzione il grande matematico J. Hadamard, *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*, Milano, Raffaello Cortina, 1993.

[13] Cit. in K. Gödel, *Collected Works*, ed. by S. Fefferman, voll. I-V, Oxford, Oxford Univ. Press, 1986-2003, vol IV (2003), pp. 502-505.

[14] Cit. in *Pragmatic Platonism*, in E.G. Omodeo - A. Policriti (ed.), *M. Davis on Computability, Computational Logic, and Mathematical Foundations*, Berlin, Springer 2016, pp. 349-356.

tati, che hanno trasformato anche la filosofia del secolo scorso, parlerò in seguito. Anche G.H. Hardy scrisse:

> Credo che la realtà matematica sia fuori di noi, che il nostro compito sia di scoprirla o di osservarla, e che i teoremi che noi dimostriamo, qualificandoli pomposamente come nostre creazioni, siano semplicemente annotazioni delle nostre osservazioni[15].

Ricordiamo che Hardy aveva a che fare con il genio Ramanujan, che affermava che le formule gli venivano comunicate nel sonno dalla dea Namagiri, protettrice della sua famiglia.

> La teoria dei numeri [...] cominciò come scienza sperimentale. La maggior parte dei suoi famosi teoremi sono stati ipotizzati cento e più anni prima che si arrivasse alla loro dimostrazione, e sono stati suggerirti dalla evidenza di un'enorme quantità di calcoli[16].

In questa prospettiva la matematica appare più come una scienza sperimentale, il cui primo ruolo non è dimostrare, ma scoprire teoremi veri! In quest'ottica, il computer viene usato come un fisico sperimentale usa un'apparecchiatura per esplorare la struttura del mondo fisico. Il premio Nobel della fisica 2020, Roger Penrose, paragona alcune scoperte matematiche all'esplorazione di una montagna «Come il Monte Everest, l'insieme di Mandelbrot ha una esistenza propria!»[17]. E più oltre scrive:

> Vi sono casi in cui dalla struttura emerge molto di più di quanto non sia posto al principio. Qualcuno potrebbe pensare che in tali casi i matematici si siano imbattuti in 'opere di Dio'. Vi sono casi in cui la struttura matematica non ha una unicità altrettanto convincente [...]. In tali casi [...] la parola 'invenzione' [è] più appropriata che scoperta. Queste sono in effetti solo 'opere dell'uomo'[18].

2. *Matematica, fisica e mistica*

Le esperienze di contemplazione di un ordine cosmico possono giungere a una conoscenza di un 'Dio dei filosofi' e ci si può domandare se ci possa essere anche una relazione più stretta con una contemplazione mistica cristiana. Direi che la contemplazione di cui sinora si è parla-

---

[15] G.H. Hardy, *Apologia di un matematico*, trad. di L. Saraval, Milano, Garzanti, 2002, p. 89.

[16] Cit. in G. Chaitin, *Alla ricerca di Omega*, Milano, Adelphi, 2005, p. 33.

[17] R. Penrose, *La mente nuova dell'Imperatore*, Oxford, Oxford University Press, 1989, p. 134.

[18] *Ibidem.*

to ne sia una sorta di preparazione. Dante esprime magistralmente questo percorso nell'ultimo canto della *Divina Commedia* con queste parole:

Qual è 'l geometra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,
tal era io a quella vista nova:
veder voleva come si convenne
l'imago al cerchio e come vi s'indova;
ma non eran da ciò le proprie penne:
se non che la mia mente fu percossa
da un fulgore in che sua voglia venne[19].

A che cosa si riferisce Dante? Molto probabilmente allude al famoso problema della quadratura del cerchio, ossia costruire, mediante solo riga e compasso, un quadrato che abbia la stessa area di un cerchio. I greci avevano cercato invano la soluzione di tale quesito che nel Medioevo era considerato senza speranza. In effetti, poco meno di 150 anni fa, fu dimostrato essere un problema impossibile, senza soluzione! Dapprima fu mostrato che esso equivale a provare che π è un numero trascendente, ossia non è soluzione di nessun polinomio a coefficienti interi. Questo poi fu rigorosamente dimostrato da F. von Lindemann nel 1882 mediante tecniche di analisi matematica.

Mi pare che Dante, con il suo felice paragone, ci insegni a spingere al massimo la potenza naturale della conoscenza, in tutte le possibilità a nostra disposizione, anche con intuizioni ardite, sapendo poi che... si può ricevere una luce dall'alto. San Tommaso definisce l'esperienza di *raptus* come «elevazione, in forma di una natura superiore, da ciò che è secondo natura a ciò che supera la natura (*in id quod est supra naturam*)»[20].

Un grande scienziato, che ha unito genio matematico a vere e proprie esperienze mistiche, fu Blaise Pascal. Il 23 novembre 1654, Pascal ha vissuto un'esperienza mistica fortissima, la sua 'Notte di fuoco', che gli fece versare lacrime di gioia:

Sembra trattarsi di un incontro di cui egli stesso ha riconosciuto l'analogia con quello, fondamentale in tutta la storia della rivelazione e della salvezza, vissuto da Mosè davanti al roveto ardente (cfr *Es* 3). [...] Il parallelismo sembra indicato da Pascal stesso che, immediatamente dopo l'evocazione del fuoco, ha ripreso il titolo che il Signore si era dato davanti a Mosè: «Dio di Abramo, Dio di Isac-

[19] *Paradiso*, canto XXXIII, vv. 133-141.

[20] Tommaso d'Aquino, *La Somma teologica*, a cura dei Domenicani italiani, Bologna, ESD, 1984, q. 75, a. 1.

co, Dio di Giacobbe" (*Es* 3,6.15), aggiungendo: «non dei filosofi e dei sapienti. Certezza, certezza, sensazione, gioia, pace. Dio di Gesù Cristo»[21].

Ritornando a tempi più recenti, il cosmologo Paul Davies ha scritto

Se desideriamo andare oltre, dobbiamo affidarci a un concetto diverso di comprensione rispetto a quello suggerito dalla razionalità. La via mistica è forse una strada verso tale comprensione. Io non ho mai vissuto una esperienza mistica ma mantengo la mente aperta al valore di queste esperienze. Forse rappresentano l'unico modo per trascendere i limiti che la scienza e la filosofia non possono varcare, l'unica via possibile verso l'Ultimo[22].

Il premio Nobel per la fisica 2022 per la scoperta della nonlocalità quantistica, Anton Zeilinger, diceva in una conferenza tenuta nel maggio 2024:

One of my favorite statements is of Karl Rahner, the famous Jesuit once in Innsbruck, who once said: «The Christian of the future will be mystic or will not exist at all». That's really my belief! Mysticism is a very central point on which I think we can build a lot[23].

Parafrasando Zeilinger con altre parole potremmo dire che *la scienza aiuta a essere più mistici!*

Qui il termine 'misticismo' indica una genuina esperienza di Dio emergente dalle profondità dell'esistenza, trovare per via esperienziale il *quid divinum* nascosto nei particolari, come scriveva con martellante insistenza un altro mistico del secolo scorso, san Josemaría Escrivá, per esempio nell'omelia *Amare il mondo appassionatamente*[24]. In questa prospettiva mi sovviene questo testo di Enrico Medi, astrofisico del secolo scorso:

Oh, voi misteriose galassie, voi mandate luce ma non intendete; voi mandate bagliori di bellezza ma bellezza non possedete; voi avete immensità di grandezza ma grandezza non calcolata. Io vi vedo, vi calcolo, vi intendo, vi studio e vi scopro, vi penetro e vi raccolgo. Da voi io prendo la luce e ne faccio scienza, prendo il moto e ne fo sapienza, prendo lo sfavillio dei colori e ne fo poesia; io prendo voi stelle nelle mie mani e tremando nell'unità dell'essere mio vi alzo al di sopra di voi stesse e in preghiera vi porgo a quel Creatore che solo per mezzo mio voi stelle potete adorare[25].

---

[21] Papa Francesco, *Sublimitas et miseria hominis*, 19 giugno 2023.

[22] P. Davies, *La mente di Dio. Il senso della nostra vita nell'universo*, Milano, Mondadori, 1996.

[23] https://www.youtube.com/watch?v=za-nXB-xsE0. La cit. di K. Rahner si può trovare in «Theological Investigations», vol. 20 (1971-1992), p. 149.

[24] J. Escrivà, *Amare il mondo appassionatamente*, Milano, Ares, 2024.

[25] E. Medi, *Le opere. Inno alla creazione*, cit. in https://disf.org/autori/enrico-medi.

Questo inno suona come un'appassionata versione moderna del *Cantico delle Creature* di san Francesco d'Assisi.

3. *Contemplazione e spirito umano*

Un aspetto contemplativo della ricerca fisico-matematica penso consista nel fatto che essa è una costante ricerca del senso dell'esistenza. Sentiamo alcuni testimoni scelti. Assieme a Galileo Galilei, mi viene in mente Newton, che si considerava un teologo. La sua ricerca non mirava ad andare sulla luna – anche se le equazioni da lui scoperte sono alla base dei viaggi contemporanei nello spazio –; lui voleva capire il pensiero di Dio! Penso a George Cantor. Fanno ben intuire la rilevanza cosmico-religiosa che attribuiva alle sue scoperte nella teoria degli infiniti i nomi che diede al 'più piccolo infinito', quello numerabile, $\aleph$, e al 'più grande' insieme Ω, l'insieme di tutti gli insiemi… Verso la fine dell'Ottocento, Max Planck decide di dedicarsi nella sua disciplina, la fisica, al problema che lui considera, in quel momento, il più vicino all'Assoluto, e di dedicare tutte le sue energie a risolvere il problema della radiazione di corpo nero. Scrive Planck: «Io avevo sempre considerato la ricerca di qualcosa di assoluto come lo scopo più elevato di tutte le attività scientifiche»[26]. L'ardita soluzione di Planck è l'introduzione della quantizzazione della energia, pietra miliare della meccanica quantistica. Penso a Ricci-Curbastro, che decise di dedicarsi allo sviluppo del 'calcolo assoluto', la geometria differenziale, in quanto da lui considerata la materia nel suo campo più vicina a Dio, all'Assoluto, e che sarà la base della formulazione matematica della teoria della relatività.

Sicuramente convivono molte altre concezioni e visioni della scienza, più positivistiche e rivolte all'applicazione tecnologica, il cui spirito mi pare ben descritto da questo testo del Faust:

> sull'al di là la vista ci è sbarrata; folle chi aguzza gli occhi verso il cielo […]. Stia saldo in piedi e qui si guardi intorno; al magnanimo il mondo non è muto. Vagare nell'eterno a che gli serve! Ciò che comprende egli può afferrarlo. Così percorra il giorno suo terreno[27].

Un rapporto che lega matematica e contemplazione a mio avviso si trova anche nella funzione umanizzante che ha la ricerca matematica. A che cosa serve la matematica, si sente sovente chiedere? Quasi per giustifi-

---

[26] M. Planck, *La conoscenza del mondo fisico*, Torino, Bollati Boringhieri, 1993, cit in https://disf.org/autori/max-planck.

[27] W. Goethe, *Faust*, II, trad. it. di A. Casalegno, Milano, Garzanti, 1994, pp. 1029-1033.

carsi, e per avere più facile accesso a finanziamenti, diciamo talvolta che la matematica va studiata perché sta alla base di applicazioni utili – ed è vero! –, ma non penso che questo sia il motivo più significativo per uno scienziato. È come chiedersi a che cosa serva andare alla National Gallery a contemplare *La Vergine delle rocce* di Leonardo da Vinci. La risposta forse più giusta e sensata è che «È bello!».

E poi forse è più attuale che mai ricordare la lezione di A. Flexner, fondatore dell'Institute for Advanced Studies di Princeton, circa l'utilità della ricerca inutile! Nel celebre articolo *The usefulness of useless knowledge*[28] Flexner dimostra come importantissime ricadute tecnologiche siano nate da inaspettate scoperte di ricerca fondamentale astratta, come la Radio, il cui merito – sostiene Flexner – è di Maxwell ed Hertz, che hanno posto le fondamenta delle equazioni elettro-magnetiche e stabilito la loro connessione con la luce.

La ricerca matematica, e le sue sconcertanti scoperte, hanno il grande merito di liberare lo spirito umano da una concezione troppo angusta della realtà, dalle paure di tutto ciò che appare inatteso e paradossale. Il grande matematico E. De Giorgi scriveva:

> la matematica condivide l'ideale 'conviviale' della 'Sapienza', che ha animato i saggi dell'antichità, che ritroviamo nel termine 'simposio' che abbiamo ereditato dai filosofi greci, nel termine 'convivio' usato da Dante Alighieri, nella bella immagine usata dal più antico libro sapienziale della Bibbia, il Libro dei *Proverbi*, quando dice che la Sapienza ha costruito una casa su sette colonne, ha preparato in essa un grande banchetto e manda le sue ancelle per la città per diffondere gli inviti (*Proverbi* 9,1-6)[29].

Il confronto con la verità oggettiva, l'ascolto e l'obbedienza alle cose come sono, la docilità al reale, la ricerca sincera e appassionata di verità obiettive, migliora l'uomo. Riporto questa testimonianza del matematico francese Lafforgue, medaglia Field nel 2002, che condivido appieno:

> La matematica e le scienze forniscono l'occasione di creare un legame che [...] ha una vera e propria profondità, orienta in comune verso la ricerca di verità, in un amore condiviso. [...] I matematici e gli scienziati assaporano il buon effetto sulle relazioni umane proprio per la preoccupazione di obiettività e di verità. [...] Il paradosso è che questa qualità delle relazioni umane può essere ottenuta solo a una condizione: che sia riconosciuto il valore intrinseco dell'oggetto di studio su cui tutti fanno convergere i loro sforzi. [...] l'ambiente dei mate-

---

[28] A. Flexner, *The usefulness of useless knowledge*, in «Harper's Magazine», 1939, 179, pp. 544-552.

[29] E. De Giorgi, *La matematica tra sogno e realtà*, selezione per la XXXVI Olimpiade di Matematica, Cesenatico, 1995.

matici che io conosco e che è rimasto orientato verso la ricerca della soluzione di problemi specifici e verso lo studio di oggetti matematici astratti e molto precisi [...] ottiene come beneficio laterale e indiretto, quindi, una cosa aggiuntiva, buone relazioni fra le persone[30].

Ogni forma di contemplazione richiede esercizio e passa attraverso purificazioni interiori. Non è questo un altro elemento tipico delle esperienze di contemplazione?

La difficoltà della matematica risalta un altro ingrediente indispensabile […] per la ricerca di nuova matematica: questo ingrediente è la sofferenza. Il quotidiano del matematico è composto da lunghissimi periodi di sterilità apparente. Il matematico deve perseverare, rimanere concentrato sugli stessi punti che lo tormentano, sulle stesse domande che lo angosciano, sviluppare la sua mente, sopportare la sofferenza che questa tensione comporta, una sofferenza che il testo che poi concretizzerà la scoperta non tradurrà. La difficoltà della matematica ci fornisce la lezione che niente di creativo, dunque, nessuna manifestazione della vita si fa senza sofferenza. L'esperienza della matematica insegna che l'inumano non è nella difficoltà, nemmeno nella sofferenza nel momento in cui questa non è distruttiva, invece indica che l'inumano è nella facilità[31].

E poco dopo prosegue:

Secondo paradosso: la matematica è umana perché è di accesso difficile. Nella matematica è impossibile essere uno scienziato a metà o al 50%. […] La comprensione di un fenomeno intelligibile si avvicina all'amore, non all'amore sentimento ma all'amore specificatamente cristiano, la carità, il desiderio di comprensione condivisibile è alla base della matematica […]. Questo carattere di difficoltà si aggiunge alla caratteristica degli oggetti di studio, impedendo che diventino una sfida affettiva o di potere...[32]

E conclude Lafforgue sostenendo che «la vita può solo essere vissuta facendo della matematica, della fisica, o facendo qualsiasi altra cosa diventando servitori delle verità oggettivizzabili».

Nelle riflessioni sulla matematica della filosofa Simone Weil una delle parole che compaiono più frequentemente è 'obbedienza', che sorprende un po' conoscendo quanto essa fosse restia a ogni forma di autorità esteriore. L'obbedienza di cui parla Simone Weil è innanzi tutto l'obbedienza verso Dio degli enti matematici soggetti alla necessità espressa dalle implicazioni logiche e quella della materia soggetta a leggi mate-

---

[30] L. Lafforgue, *Matematica e condizione umana*, Meeting di Rimini, conferenza del 21 agosto 2007.

[31] *Ibidem*.

[32] *Ibidem*.

matiche: «La mathématique est la preuve que tout obéit à Dieu»[33]. Ancora più sorprendentemente Weil parla di ‘docilità’ e ‘dolcezza’ in matematica: «Docilité des êtres mathématiques. [...] L’empire de la mathématique sur la matière est un empire de douceur (Lien entre la mathématique et l’amour)»[34]. E continua «Parfaite docilité. Parfaite obéissance des êtres mathématiques. Modèle de l’obéissance»[35]. E nel taccuino successivo scrive: «La principale source de la beauté mathématique est la docilité des êtres mathématiques. Ce qui est résistance à nous n’est pas caprice mais docilité à leur loi. Docilité là où il n’y a nulle force, nulle contrainte. Obéissance. Imiter cette obéissance»[36].

Infine, come ho appreso leggendo la conferenza su *Simone Weil et la mathématique*, di L. Lafforgue[37], Simone Weil vede il riflesso inatteso del mistero della Croce di Cristo sotto il nome dello stare di fronte alla contraddizione, nelle scienze e in particolare in matematica: per l’intelletto, la contemplazione della contraddizione è un modo di lasciarsi crocifiggere con Cristo, condizione indispensabile per toccare la verità.

Nella seguente sezione presenterò, in una prospettiva storica, i teoremi di incompletezza di Gödel-Turing che tanta influenza hanno anche in filosofia. Tali risultati, che richiedono la introduzione di qualche concetto più specifico, penso illuminino la comprensione della natura della matematica.

4. *Sistemi formali e teoremi di Gödel-Turing*

Un’aspirazione profondamente radicata nell’uomo è quella di raggiungere una conoscenza vera, assolutamente certa e inconfutabile. Propriamente tale si presentò sin dai tempi antichi la geometria di Euclide costruita sulle solide fondamenta di alcuni *assiomi* ‘evidenti’ – che definiscono ciò che si intende per punto, linea ecc. – e cinque *postulati* ritenuti ‘ovviamente veri’, da cui si deducono, per conseguenza necessaria, nuove conclusioni, dette *teoremi*. L’inespugnabile struttura *ipotetico-deduttiva* della geometria euclidea esercitò un costante fascino in tutte le epoche.

Riallacciandosi a un’antica tradizione, risalente a Pitagora e Platone, affermante l’armonia matematica del mondo, Galileo decise di affrontare lo studio delle scienze fisiche seguendo la celebre massima di «non

[33] S. Weil, *Cahier XI*, p. III.330, cit. in L. Lafforgue, *Simone Weil et la mathématique*, Paris, Bibliothèque nationale de France, 23 ottobre 2009.

[34] *Ibidem*.

[35] Id., *Cahier X*, p. III.315, cit. in *ibidem*.

[36] Id., *Cahier XI*, p. III.326, cit. in *ibidem*.

[37] L. Lafforgue, *Simone Weil et la mathématique*, cit.

tentare l'investigazione delle sustanze naturali», ma di limitarsi alle «affezioni quantitative», quali, per esempio, «il luogo, il moto, la figura, la grandezza, la mutabilità, l'opacità»:

O noi vogliamo specolando tentar di penetrar l'essenza vera ed intrinseca delle sustanze naturali; o noi vogliamo contentarci di venir in notizia d'alcune loro affezioni. Il tentar l'essenza, l'ho per impresa non meno impossibile e per fatica non men vana nelle prossime sustanze elementari che nelle remotissime e celesti. … Ma se vorremo fermarci nell'apprensione di alcune affezioni, non mi par che sia da desperar di poter conseguirle anco nei corpi lontanissimi da noi, non meno che nei prossimi[38].

Galileo proponeva un modo per sviluppare una scienza quantitativa, scevra dalle ambiguità dei linguaggi naturali polisemici, in cui ogni parola può assumere molti significati differenti.

Qualche decennio più tardi, nel 1684, Newton annunciò di essere in grado di *predire* il moto dei pianeti *deducendolo* dalla legge di gravitazione universale! Il contenuto di 'informazione' circa l'evoluzione planetaria era stata 'compresso' in una semplice equazione differenziale e da questa poteva essere dedotta. I successi di tale impostazione furono enormi. La scoperta di Nettuno nel 1848 da parte di Le Verrier ne è un clamoroso coronamento: questo pianeta venne prima dedotto in base agli effetti gravitazionali calcolati dalle equazioni di Newton e solo in seguito fu osservato! Il modello di ogni sapere doveva oramai ricalcare la meccanica, esposta *de more geometrico*.

Un forte impulso alla logica matematica formale venne anche dal problema fondazionale delle geometrie non euclidee, prive di una base intuitiva evidente. Di che cosa si tratta? Nell'imponente costruzione della geometria euclidea il suo quinto postulato: «Dati una retta e un punto esterno a essa, passa *una e una sola* retta parallela alla retta data», era stato considerato fin dagli antichi meno 'ovviamente vero' degli altri postulati e si era pertanto cercato di derivarlo come un 'teorema'. Anche Aristotele sembra avere considerato la possibilità di postulati alternativi al 'quinto' di Euclide[39]. Nel 1773 Saccheri propose di dimostrarlo mediante il procedimento della *reductio ad absurdum*. Saccheri fallì nel suo tentativo di trovare una contraddizione assumendo il postulato modificato: «Data una retta e un punto esterno a essa passano *infinite* rette parallele alla retta data»! In seguito Gauss, Bolyai e Lobachevsky trovarono profondi risultati geometrici che, per quanto sembrassero 'strani' teoremi,

---

[38] G. Galilei, *III lettera al signor M. Velseri sulle macchie solari*, 1 dicembre 1612.

[39] Cfr. I. Toth, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria. Prolegomeni alla comprensione dei frammenti non-euclidei nel "Corpus aristotelicum" nel loro contesto matematico e filosofico*, trad. di E. Cattanei, Milano, Vita e Pensiero, 1997.

affermanti, per esempio, che «la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto», non erano incoerenti tra loro. Con grande coraggio intellettuale, e contro l'autorità filosofica di Kant – secondo cui i postulati di Euclide sono forme pure *a priori* della mente – si congetturò che una tale geometria, detta iperbolica, potesse essere perfettamente coerente. Assumendo invece il postulato: «Data una retta e un punto esterno a essa non passa *alcuna* retta parallela alla retta data», Riemann dette origine a un altro sistema geometrico, detto 'geometria ellittica'. Ma, in mancanza di una base intuitiva evidente, come stabilire che non si troveranno tra mille, diecimila anni, insomma, mai, contraddizioni in una siffatta geometria?

Stimolata da queste problematiche, il problema principale della logica formale divenne quello di come stabilire la '*Coerenza*' e la '*Completezza*' di un sistema formale – cioè di un alfabeto di simboli corredato da assiomi e regole di deduzione – dal suo interno. '*Coerenza*' significa l'impossibilità di inferire proposizioni contraddittorie dagli assiomi. '*Completezza*' significa che ogni proposizione sintatticamente ben definita nel sistema è formalmente deducibile dal suo interno.

Verso la fine dell'Ottocento, nell'àmbito del positivismo logico, prese sempre più consenso il programma del formalismo, formulato per esempio da Hilbert: ridurre ogni disciplina a un sistema formale, facendo a meno della comprensione del 'significato' degli enunciati, ridotti a mere sequenze di simboli manipolabili da regole algoritmiche.

Nel 1930 avvenne un terremoto: Kurt Gödel, giovane logico del circolo di Vienna, scoprì le antinomie in cui incorre ogni sistema formale! Simili difficoltà erano note emergere in ragionamenti 'autoreferenziali', quali il celebre paradosso di Epimenide: «Un cretese dice: "Tutti i cretesi sono bugiardi"». Il cretese dice il vero o il falso? Nel lavoro *Sui principi formalmente indecidibili dei "Principia matematica" e di sistemi affini*[40], Gödel riuscì a costruire in modo sintatticamente ineccepibile una siffatta autoreferenzialità, dimostrando che:

Teorema I: ogni sistema formale che sia coerente è incompleto; ossia esiste sempre una proposizione P, sintatticamente ben definita, non deducibile, né confutabile, formalmente nel sistema stesso (una siffatta proposizione si dice 'formalmente indecidibile').

Teorema II: è impossibile stabilire la coerenza dei postulati di un sistema formale dall'interno del sistema stesso.

La proposizione di Gödel P è la trascrizione sintatticamente precisa dell'affermazione:

P: «questa affermazione non è dimostrabile nel sistema formale».

---

[40] K. Gödel, *Opere*, I, Torino, Bollati Boringhieri, 1999.

Gödel concluse il suo articolo notando che, con un ragionamento meta-formale, si può stabilire, la *verità* della suddetta proposizione P: riflettendo sul significato della formula gödeliana, che afferma di non essere dimostrabile, segue che essa è vera! Poiché essa è effettivamente non dimostrabile! Come sottolinea R. Penrose, il teorema di Gödel, che talvolta viene visto come un limite al ragionamento matematico, sembra piuttosto indicare l'opposto: questo 'vedere' (*insight*), 'capire', attraverso cui si giunge ad affermare la verità della proposizione di Gödel, è una proprietà della mente umana. Di contro, i sistemi formali si rivelano come qualcosa di meccanico, troppo meccanico. La nozione di verità e dimostrabilità non coincidono affatto. Gödel scrisse:

> Come conseguenza dei pregiudizi filosofici della nostra epoca [...] un concetto di verità matematica oggettiva, opposto alla dimostrabilità, era visto con il massimo sospetto ed era ampiamente rifiutato come privo di senso[41].

La sintassi non sarà mai capace di esaurire la semantica! Gödel scrisse al sociologo Grandjean:

> Non ho mai aderito alla prospettiva secondo cui la matematica è sintassi del linguaggio. Piuttosto, questa prospettiva, intesa in qualsiasi senso ragionevole, può essere confutata dai miei risultati[42].

Si sarebbe potuto ancora salvare una parte del programma formalistico se, almeno, si fosse potuto trovare un procedimento meccanico, algoritmico, capace di individuare tutte le proposizioni indecidibili del sistema formale. In questo modo tali proposizioni sarebbero potute essere eliminate in blocco, considerandole come esotiche rarità matematiche. Ma nel 1936 Alain Turing provò che un tale algoritmo non sarà mai disponibile, semplicemente non esiste!

È utile far calare tali proposizioni formalmente indecidibili nell'aritmetica, nel contesto delle equazioni diofantee (il cui nome deriva dal matematico greco Diofanto), ossia un'equazione del tipo $p(x_1, \ldots, x_k) = 0$, dove p è un polinomio a coefficienti interi e le soluzioni $(x_1, \ldots, x_k)$ sono cercate nei numeri interi. Per esempio, il famoso problema di Fermat, risolto da A. Wiles verso la fine dello scorso millennio, dopo secoli di ricerche, consiste nel provare che una certa equazione diofantea non ha soluzioni. Potrà un calcolatore soppiantare completamente la fantasia e creatività di un ricercatore nel risolvere nuovi problemi aritmetici?

---

[41] K. GÖDEL, *Nachlass*, cit. in F. BERTO, *Tutti pazzi per Gödel*, Roma-Bari, Laterza, 2008, p. 179.

[42] Cit. in R. GOLDSTEIN, *Incompleteness. The Proof and Paradox of Kurt Gödel*, Bergamo, Atlas Books, 2005, pp. 112-113.

Per rispondere a questa domanda aiuta conoscere i teoremi di incompletezza diofantea, che sono una conseguenza dei risultati di Gödel-Turing, e dei rinomati lavori di M. Davis, H. Putnam, J. Robinson[43] e Matiyasevich[44]. Il primo di essi dice:

Teorema. *Esiste una equazione diofantea che non ha soluzioni intere, sebbene ciò non sia formalmente dimostrabile nell'aritmetica di Peano.*

Trovava soluzione negativa anche il decimo problema di Hilbert:

Teorema. *Esiste una classe di equazioni diofantee per cui non è possibile decidere algoritmicamente se hanno soluzioni intere.*

Un merito di questi enunciati è di essere aritmeticamente molto definiti. La domanda se un'equazione diofantea abbia soluzioni intere o meno, ammette di principio una e una sola risposta: o sì o no. I teoremi precedenti implicano che, a ogni istante, esiste un'equazione diofantea per cui la risposta circa le sue soluzioni non esiste in nessuna mente umana, neanche nella forma implicita: «Posso essere sicuro di ottenerla dopo un numero finito, arbitrariamente lungo, di operazioni». Ciò sembra indicare che la verità matematica non sarà mai contenuta, e quindi non esista *a priori*, in una mente umana, aprendo la domanda posta a titolo dell'articolo *In whose mind is Mathematics an 'a priori cognition'?*[45], a cui rimando per una presentazione più ampia di questi argomenti.

In conclusione, la ricchezza della verità matematica non sarà mai esaurita da un computer e possiamo ben esclamare con Amleto che, anche in fisica e matematica, «ci sono più cose in cielo e in terra, o Laerte, di quante ne abbia mai sognate la tua filosofia». Lo stupore e il *pathos* della scoperta nella matematica sarà un'esperienza umana duratura che accompagnerà la costante ricerca umana di verità oggettive e di senso dell'esistenza. La docilità di ascoltare e arrendersi alla realtà, la rinuncia a sé stessi e l'atteggiamento umile e attento dinanzi alla bellezza matematica costituiscono un atteggiamento fondante del ricercatore. Dopo più di quattro secoli di scienza moderna, ci piace raccogliere il programma di Galileo:

Le affezioni quantitative sono mezzi a poter meglio filosofar intorno alle più controverse sustanze naturali, le quali, poi, sollevandoci all'ultimo scopo delle nostre fatiche, cioè all'Amore del divino Artefice, ci conservino la speranza di poter apprendere in Lui, fonte di luce e di verità, ogn'altro vero[46].

---

[43] M. Davis - H. Putnam - J. Robinson, *The decision problem for exponential Diophantine equations*, in «Annals of Math.», vol. 74 (1961), 3, pp. 425-436.

[44] Y. Matiyasevich, *Hilbert's 10th Problem*, Cambridge, MIT Press, 1993.

[45] M. Berti - A. Suarez - R. Tarchini, *In whose mind is Mathematics an 'a priori cognition'?*, in arxiv.org/abs/0809.3691.

[46] G. Galilei, *Lettera al M. Velseri*, cit.

Bibliografia essenziale

M. Berti - A. Suarez - R. Tarchini, *In whose mind is Mathematics an 'a priori cognition'?*, in arxiv.org/abs/0809.3691.

P. Davis, *La mente di Dio. Il senso della nostra vita nell'universo*, Milano, Mondadori, 1996.

K. Gödel, *Collected Works*, ed. by S. Fefferman, voll. I-V, Oxford, Oxford Univ. Press, 1986-2003.

R. Goldstein, *Incompleteness. The Proof and Paradox of Kurt Gödel*, Bergamo, Atlas Books, 2005.

J. Hadamard, *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*, Milano, Raffaello Cortina, 1993.

Y. Matiyasevich, *Hilbert's 10th Problem*, Cambridge, MIT Press, 1993.

R. Penrose, *La mente nuova dell'Imperatore*, Oxford, Oxford University Press, 1989.

M. Planck, *La conoscenza del mondo fisico*, Torino, Bollati Boringhieri, 1993.

E. Schrödinger, *What is Life?*, Cambridge, Cambridge University Press, 1945.